2次元複素空間形内の一定平均曲率に関する尾方の微分方程式系について (部分多様体論とその周辺領域における新しい研究対象と方法)

平川, 信也; 剱持, 勝衛; 尾方, 隆司

数理解析研究所講究録 1403 巻 2004 年 108-112

2次元複素空間形内の一定平均曲率に関する尾方の微分方程式系について

東北大学理学研究科　平川 信也 (Shinya Hirakawa)
Mathematical Institute, Tohoku Univ.
東北大学理学研究科　剱持 勝衛 (Katsuei Kenmotsu)
Mathematical Institute, Tohoku Univ.
山形大学理学部　尾方 隆司 (Takashi Ogata)
Department of Math., Yamagata Univ.

2003 年夏, 共同研究者の一人, 平川により論文 [4] の議論にギャップがあることが指摘され, そのため論文 [3] の分類が完全でないことが分かった. そのことから, もれている部分をうずめるべく調べた結果, 平均曲率ベクトルが平行な任意の曲面の局所分類に関して, 最終的と思われる結果を得たので, それについて報告する.

$\overline{M}[4\rho]$ を一定な正則断面曲率 4ρ を持つ複素 2 次元複素空間形とし, $<,>$をそのケーラー計量, J を複素構造とする. また, M を向きつけられた連結な実 2 次元リーマン多様体とし, $x: M \longrightarrow \overline{M}[4\rho]$ を 0 でない平行な平均曲率ベクトル場を持つ等長はめ込みとする. H を x の平均曲率ベクトル場とすると, H の長さは一定となるので $|H| = 2b > 0$ とおく. M の正規直交基 $\{e_1, e_2\}$ にたいして x のケーラー角度 α は $\cos(\alpha) =< Jx_*e_1, x_*e_2 >$ で定義される. α は M の正規直交基の取り方に依存しない x の不変量で, M 上の実数値関数である. 以下, $\alpha \neq 0, \pi/2, \pi$ と仮定する. 仮定より $e_3 = -H/|H|$ は M 上の単位法ベクトル場になる. これに直交するもう一つの単位法ベクトル場を e_4 とする. この時, $\{e_3, e_4, Je_3, Je_4\}$ に Gram-Schmidt の正規直交化をおこなうことにより $\{e_3, e_4\}$ に直交する, つまり M 上の正規直交枠 $\{e_1, e_2\}$ が定まる. $M, \overline{M}[4\rho]$ の向きに適合した x に沿ったベクトル場 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ は符号を除いて一意である. このようにして得られた $\{e_a\}, 1 \leq a \leq 4,$ に対し $\overline{M}[4\rho]$ 上のユニタリー基 $\{E_1, E_2\}$ で, その $x(M)$ への制限に対応して定まる実ベクトル場が $\{e_a\}$ になるようなものが存在する. $\{E_A\}, 1 \leq A \leq 2$ の双対基を $\{\omega_A\}$ とすると, $\{\omega_A\}$ に関するユニタリー接続形式 $\{\omega_{AB}\}, 1 \leq A, B \leq 2,$ が一意に定まる. この時, x の定義方程式は次のようになる.

$$\sin(\frac{\alpha}{2})\omega_1 - \cos(\frac{\alpha}{2})\bar{\omega}_2 = 0. \tag{1}$$

M 上の複素数値 1-形式 ϕ を

$$\phi = \cos(\frac{\alpha}{2})\omega_1 + \sin(\frac{\alpha}{2})\bar{\omega}_2 \tag{2}$$

と定義すると, M のリーマン計量は

$$ds^2 = \phi\bar{\phi} = \omega_1\bar{\omega}_1 + \omega_2\bar{\omega}_2 \tag{3}$$

となり, さらに ϕ は M 上の複素構造を定義する.
x の第二基本形式の複素化を表す M 上の複素数値関数 a, c が次式 (4), (5) で得られる :

$$\frac{1}{2}\{d\alpha + \sin(\alpha)(\omega_{11} + \omega_{22})\} = a\phi + b\bar{\phi} \tag{4}$$

$$\omega_{12} = b\phi + c\bar{\phi}. \tag{5}$$

また, x の法接続形式 $= 0$ より

$$\sin^2(\frac{\alpha}{2})\omega_{11} - \cos^2(\frac{\alpha}{2})\omega_{22} = 0 \tag{6}$$

が成り立つ. x の Gauss 方程式, Codazzi-Mainardi 方程式, および Ricci 方程式は各々次の (7), (8, 9), (10) となる.

$$K = 4(b^2 - |a|^2) + 6\rho\cos^2(\alpha), \tag{7}$$

$$da \wedge \phi = -\{2a(\bar{a} - b)\cot(\alpha) + \frac{3}{4}\rho\sin(2\alpha)\}\phi \wedge \bar{\phi}, \tag{8}$$

$$dc \wedge \bar{\phi} = 2c(a - b)\cot(\alpha)\phi \wedge \bar{\phi}, \tag{9}$$

$$|a|^2 - |c|^2 + \frac{\rho}{2}(3\sin^2(\alpha) - 2) = 0. \tag{10}$$

逆に, M 上の複素数値関数 a, c と実数値関数 α, 正定数 b を, 式 (1) から式 (10) を満たすように定めると, 複素数値 1-形式 ϕ と $\{\omega_A, \omega_{AB}\}$ が上式から定義でき構造方程式を満たすので, [1] より M から $\overline{M}[4\rho]$ への等長はめ込み x が得られる.

システム (1) から (10) の解析を行う. (4) より,

$$d\alpha = (a + b)\phi + (\bar{a} + b)\bar{\phi}. \tag{11}$$

また (2) より, 2 次元リーマン多様体としての M の構造方程式を得る:

$$d\phi = (\bar{a} - b)\cot(\alpha)\phi \wedge \bar{\phi}. \tag{12}$$

(8), (9) より M 上の複素数値関数 $a_{,1}, c_{,2}$ を次の式で定義する.

$$da = a_{,1}\,\phi + \{2a(\bar{a} - b)\cot(\alpha) + \frac{3}{4}\rho\sin(2\alpha)\}\bar{\phi}, \tag{13}$$

$$dc = 2(a - b)c\cot(\alpha)\phi + c_{,2}\,\bar{\phi}. \tag{14}$$

この時 $a_{,1}, c_{,2}$ に関して次の式を得る: まず

$$g_1(\alpha, a, b, \rho) = \rho\{3b\sin(2\alpha) + \frac{3}{4}a\sin(2\alpha) + 2(a - b)\cot(\alpha)\}$$

とおく. $g_1(\alpha, a, b, \rho)$ は M 上の複素数値関数であることに注意する. この時, (10) の外微分より

$$c\bar{c}_{,2} - \bar{a}a_{,1} = g_1(\alpha, a, b, \rho), \tag{15}$$

が成立する. さらに (15) を外微分することにより (13), (14) を使うと

$$|c_{,2}|^2 - |a_{,1}|^2 = g_2(\alpha, a, \bar{a}, b, \rho) \tag{16}$$

が得られ, ここで $g_2(\alpha, a.\bar{a}, b, \rho)$ はつぎのように, 具体的に書き下せる実数値関数である.

$$g_2(\alpha,a,\bar{a},b,\rho)=\frac{3}{2}\rho^2\cos^2(\alpha)(4-\frac{3}{2}\sin^2(\alpha))$$
$$-\rho\Big\{|a|^2\frac{4}{\sin^2(\alpha)}+\frac{b^2(-33\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha)+5\sin^2(\alpha)+4\cos^2(\alpha))}{\sin^2(\alpha)}$$
$$+(a+\bar{a})\frac{b(-3\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)-8\cos^2(\alpha)+9\sin^2(\alpha))}{2\sin^2(\alpha)}\Big\}.$$

一般論より余次元 2 の曲面は等長はめ込み x の第二基本形式とその共変微分で定まる. よって, $a, c, a_{,1}, c_{,2}$ に関する等式がすべてわかれば, x が決定される. したがって, (16) を外微分しても新しい情報は出てこない. (15), (16) より $a_{,1}, c_{,2}$ に関して 3 個の実数値をとる等式が得られるが, $a_{,1}, c_{,2}$ は複素数値であるから実数値関数としては 4 個からなる. よって, 実数値関数を一つ与えると, (15), (16) から $a_{,1}, c_{,2}$ が定まる. それらを (13), (14) に代入し $\phi=\lambda dz, \lambda=|\lambda|e^{\sqrt{-1}\theta}$ とおくと, (11), (13), (14) は与えられたリーマン計量 ds^2 に関する θ, α, a, c の全微分方程式系となる. 微分方程式系 (11),(13),(14) をより詳しく調べる.

命題 1 (14) の可積分条件より (13) の可積分条件が得られる.

つまり, (14) 式の積分可能条件と (15), (16) 式から (13) 式が積分可能になることが分かる. (これの証明に, (16) の g_2 の具体的な表現が必要になる.) 結局, (11) と (14) の積分可能条件だけが残る.
α に関する積分可能条件は, (11) より次を得る.

$$\Delta\alpha=\cot(\alpha)\{-2K+6\rho\cos^2(\alpha)+16b^2+6\rho-4|\nabla\alpha|^2\}. \tag{17}$$

(11) から $\partial\alpha/\partial\bar{z}=(\bar{a}+b)\bar{\lambda}$, よって

$$|\nabla\alpha|^2:=\frac{1}{|\lambda|^2}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}\right|^2=|\bar{a}+b|^2.$$

これより $(|a|-b)^2\le|\nabla\alpha|^2\le(|a|+b)^2$, つまり

$$\left|\frac{1}{2}\sqrt{(4b^2-K+6\rho\cos^2(\alpha))}-b\right|\le|\nabla\alpha|\le\left|\frac{1}{2}\sqrt{(4b^2-K+6\rho\cos^2(\alpha))}+b\right| \tag{18}$$

が成立する.

定義 2 M 上 $a\neq\bar{a}$ かつ c が非定数の時, 等長はめ込み x を *generic* であるという.

x が *generic* である時, (14) の積分可能条件を調べる: (14) から

$$\bar{\partial}\log c = \frac{c_{;2}}{c}\bar{\phi}$$

である. さらに上式を外微分すると

$$d(\bar{\partial}\log c) = \left\{\frac{K}{2} + 2b(\bar{a}-a)\frac{(1+\cos^2(\alpha))}{\sin^2(\alpha)}\right\}\phi\wedge\bar{\phi}.$$

$c = |c|e^{\sqrt{-1}\eta}$ とおくと $\alpha \neq 0$ のとき, この式より次の 2 式が得られる.

$$\Delta\log|c| = 2K, \tag{19}$$

$$\sqrt{-1}\Delta\eta = 8b(\bar{a}-a)\frac{(1+\cos^2(\alpha))}{\sin^2(\alpha)}. \tag{20}$$

(19) 式は R^3 内の一定な平均曲率を持つ曲面に関する Pinl の条件の一般化である次の式と同値である.

$$\Delta\log\sqrt{4b^2+2\rho-K} = 2K. \tag{21}$$

最後に, θ について調べる : (12) 式より θ は次の微分方程式を満たす.

$$\frac{\partial\theta}{\partial\bar{z}} + 2\sqrt{-1}b\cot(\alpha)|\lambda|e^{-\sqrt{-1}\theta} - \sqrt{-1}\cot(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}} - \sqrt{-1}\frac{\partial\log|\lambda|}{\partial\bar{z}} = 0. \tag{22}$$

この時, (22) の可積分条件として次の式を得る.

$$\frac{2b|\lambda|}{\sin^2(\alpha)}(1+\cos^2(\alpha))\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}e^{-\sqrt{-1}\theta} + \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}e^{\sqrt{-1}\theta}\right) - 4b\cot^2(\alpha)|\lambda|^2 - \frac{\partial^2\log|\lambda|\sin(\alpha)}{\partial z\partial\bar{z}} = 0. \tag{23}$$

(23) 式より θ は α , $|\lambda|$ とその微分で表せることが分かる. また, (7), (10) より

$$|a| = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2-K+6\rho\cos^2(\alpha)}, \quad |c| = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2+2\rho-K} \tag{24}$$

が得られる. (12) と (14) より $\partial(\lambda^2\bar{c})/\partial\bar{z} = 0$. これより

$$\frac{\partial\eta}{\partial\bar{z}} = -\sqrt{-1}\frac{\partial\log(\lambda^2|\bar{c}|)}{\partial\bar{z}}, \tag{25}$$

よって η は λ と $|c|$ で定数を除いて定義される. これまでの計算で x が *generic* の時は, x の第二基本形式は x のリーマン計量とケーラー角度で定数を除いて定まることが分かった. 逆が成立して, 次の *generic* な場合の等長はめ込みの存在定理が得られる.

定理 3 ρ を実数, b を正数とする. M を R^2 のある単連結な領域とし, ds^2 を M 上のリーマン計量でそのガウス曲率 K が次の式を満たしているとする.

$$\Delta_{ds^2}\log\sqrt{4b^2+2\rho-K} = 2K, \quad (4b^2+2\rho-K) > 0.$$

また, α は M 上の可微分関数で次の式を満たすものとする.

$$\Delta_{ds^2}\alpha = \cot(\alpha)\Big\{ - 2K + 16b^2 + 6\rho\cos^2(\alpha) + 6\rho - 4|\nabla\alpha|^2\Big\},$$

$$\Big|\frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 - K + 6\rho\cos^2(\alpha))} - b\Big| \le |\nabla\alpha| \le \Big|\frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 - K + 6\rho\cos^2(\alpha))} + b\Big|,$$

$$(4b^2 - K + 6\rho\cos^2(\alpha)) > 0.$$

この時, 零でない平行な平均曲率ベクトル場をもち, ケーラー角度が α である *generic* な等長はめ込み $x : M \longrightarrow \overline{M}[4\rho]$ の 1-径数族が存在する.

Remark 尾方 [4] は $\bar{a} = a$ の場合に, システム (1) ~ (10) をある常微分方程式系に帰着させて, 等長はめ込みの存在を議論している. さらに, Kenmotsu-Zhou[3] は $\bar{a} = a$ の場合の曲面の分類を行った. また, 平川 [2] は K が一定の場合の分類を行っている.
分類をきちんと実行するには, それぞれ, 工夫が必要となる.

参考文献

[1] J. H. Eschenburg, I. V. Guadalupe, and R. A. Tribuzy, The fundamental equations of minimal surfaces in CP^2, Math. Ann., 270(1985), 571-598.
[2] 平川 信也, 2 次元複素空間形内の平行な平均曲率ベクトルをもつガウス曲率一定な曲面について, 東北大学数学教室幾何学セミナー, 2004年6月8日.
[3] K. Kenmotsu and D. Zhou, The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two dimensional complex space forms, Amer. J. Math., 122(2000), 295-317.
[4] T. Ogata, Surfaces with parallel mean curvature in $P^2(C)$, Kodai Math. J., 90(1995), 397-407.